EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

38e JAARGANG 1962/1963

III - 1 NOVEMBER 1962

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift Euclides verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, de Houtmanstraat 37 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

TOEPASSINGEN VAN DE ALGEBRA IN DE MEETKUNDE [1])

door

Prof. Dr. J. P. MURRE

VOORSCHOTEN

In de moderne meetkunde speelt de algebra een zeer grote rol; omgekeerd hebben de problemen uit de meetkunde aanleiding gegeven tot geheel nieuwe hoofdstukken in de algebra. We willen hier een voorbeeld uit de algebraïsche meetkunde bespreken namelijk de — reeds klassieke — theorie der algebraïsche krommen. We zullen trachten aan te tonen dat bekende begrippen en problemen uit de abstracte algebra op een natuurlijke manier te voorschijn komen in deze theorie (zoals dit bijv. ook gebeurt in de getallentheorie). De nadruk zal worden gelegd op het verband tussen de algebra en de meetkunde, op de verhelderende invloed die de algebra op de meetkundige problemen heeft en niet op de (overigens zeer fraaie) meetkundige theorie zelf. Hieronder volgt een kort overzicht van de begrippen die tijdens de voordracht besproken zullen worden.

Algebraïsche krommen. We zullen het systeem (lichaam) der complexe getallen met k aanduiden, we beschouwen punten in het vlak met als coördinaten complexe getallen. Een algebraïsche kromme is de verzameling punten uit het vlak waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijking $F(X, Y) = 0$, waarbij $F(X, Y) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}X^iY^j$ een veelterm is uit de veeltermring $k[X, Y]$, d.w.z. de a_{ij} zijn komplexe getallen. Natuurlijk moeten we eigenlijk — zoals wel bekend is uit de studie der kegelsneden — niet in het affiene vlak maar in het projectieve vlak werken en dan een homogene veelterm nemen. We zullen voor het gemak steeds niet-homogene coördinaten nemen maar als we een globaal probleem hebben zullen we stilzwijgend aannemen dat we overgaan naar het projectieve vlak. De kromme heet *irreduciebel* als $F(X, Y)$ irreduciebel is; we *beperken ons in het vervolg tot irreducibele krommen.*

Birationale equivalentie. In de theorie der algebraïsche krommen

[1]) Voordracht Vakantiecursus Mathematisch Centrum, 1961 (Syllabus).

s men speciaal geïnteresseerd in de „meetkunde op de kromme”, en niet in de eerste plaats in de wijze waarop de kromme in het vlak is ingebed. Vandaar dat men de volgende equivalentie-relatie invoert.

Twee irreduciebele krommen C en C' heten birationaal equivalent als er een afbeelding φ van de ene op de andere bestaat met de volgende eigenschappen:

1. φ is één-éénduidig op eventueel eindig veel uitzonderingen na; noem ψ de inverse afbeelding.

2. φ en ψ zijn rationaal, d.w.z. als $P = (x, y)$ op C en $P' = (x', y')$ op C' corresponderen dan is $x' = R_1(x, y)$, $y' = R_2(x, y)$ en $x = R'_1(x', y')$, $y = R'_2(x', y')$ met $R_1(X, Y)$ enz. rationale uitdrukkingen in de letters X en Y (of X' en Y') en coëfficiënten in k.

Vb. De kromme $x^2 - y^2 + x^3 = 0$ is birationaal eq. met een rechte. (Het dubbelpunt in de oorsprong correspondeert blijkbaar met twee verschillende punten op de rechte. Dit voorbeeld leert ons dat we — met voordeel —, i.p.v. de punten op een kromme te nemen, „takken” door die punten kunnen nemen. (Zie onder)).

Van belang zijn nu begrippen die invariant zijn onder birationale transformaties. Een voorbeeld hiervan zijn de

Rationale functies op een algebraïsche kromme. Een functie f op C heet rationaal als voor $P = (x, y)$ de $f(P) = S(x, y)$ waarbij $S(X, Y)$ weer een rationale uitdrukking is in de letters X en Y met coëfficiënten in k. Bij het rekenen met deze rationale functies moeten we er rekening mee houden dat twee verschillende uitdrukkingen
$S(X, Y) = P(X, Y)/Q(X, Y)$ en $S^*(X, Y) = P^*(X, Y)/Q^*(X, Y)$ (met $P(X, Y)$ enz. veeltermen) best dezelfde functie op C kunnen voorstellen, n.l. dit gebeurt dan en slechts dan als de veelterm $PQ^* - P^*Q$ identiek nul wordt bij invulling van coördinaten van punten op de kromme (aannemende dat Q en Q^* niet identiek nul worden op de kromme). We komen hier meteen op terug. Verder merken we op dat er op een natuurlijke manier bij iedere rationale functie f op C een rationale functie op een met C birationale kromme C' hoort n.l. definieer $f'(P')$ als $f(\psi(P))$ met ψ als boven. In deze zin is dus het begrip rationale functie birationaal invariant.

De bovenstaande begrippen en definities waren allen in wezen meetkundig, echter thans komt de algebra naar voren. Beschouw n.l. de verzameling van alle rationale functies op C. Als we op de gebruikelijke manier som en produkt van twee functies definiëren

dan zien we dat deze verzameling een lichaam vormt (C is irreduciebel).

Functielichaam van een algebraïsche kromme. Hoe kunnen we het bovenstaande lichaam K_C beschrijven? Bekijken we eerst eens de deelverzameling R bestaande uit alle rationale functies die te schrijven zijn als $P(x, y)$ met $P(X, Y)$ een veelterm. Deze verzameling vormt een ring. Als $F(X, Y)$ deelbaar is op $P(X, Y)$ dan induceert $P(X, Y)$ de nulfunctie op C en de algebra leert ons dat ook het omgekeerde juist is (F is irreduciebel, dan is het omgekeerde zeker juist). Dus de ring R is blijkbaar (isomorf met) de restklassenring $k[X, Y]/\alpha$ waarbij α het door $F(X, Y)$ in $k[X, Y]$ voortgebrachte (priem) ideaal is bestaande uit alle veeltermen van de vorm $F(X, Y) \cdot G(X, Y)$ met willekeurige $G(X, Y)$. Aangezien α priem is is R een integriteitsgebied en we kunnen op de gebruikelijke abstrakte manier het quotiëntenlichaam van R vormen. Als we deze bekende constructie vergelijken met bovenstaande opmerkingen over de niet éénduidige schrijfwijze van rationale functies (zie $S(X, Y)$ en $S^*(X, Y)$ boven), dan zien we dat het rekenen met rationale functies op C overeenkomt met het rekenen in Q. Onze conclusie is dus dat het functielichaam K_C het quotiëntenlichaam Q van de restklassenring $k[X, Y]/\alpha$ is (of beter: isomorf daarmee). Over de aard van dit lichaam merken we op dat het een uitbreidingslichaam van k is en wel een uitbreiding m.b.v. eindig veel elementen (bijv. de restklasse van X en van Y) en dat de transcendentiegraad van K_C over k één is. Er is een bekende stelling uit de algebra die we kunnen interpreteren als volgt: een uitbreiding van k van dit soort is — omgekeerd — het functielichaam van een algebraïsche vlakke kromme. Hoe zit het met de éénduidigheid?

We hebben boven reeds gezien dat birationaal equivalente krommen (op isomorfie na) hetzelfde functielichaam hebben; ook het omgekeerde is juist. Als we afzien van het isomorfisme dan betekent overgang op een andere (vlakke) birationale kromme alleen maar de overgang op twee nieuwe voortbrengenden van het functielichaam. Trouwens we hoeven ons niet tot vlakke krommen te bepalen, nemen we drie voortbrengenden dan krijgen we een ruimtekromme, enz.

Takken van een kromme en valuaties. We hebben boven reeds gezien dat het soms beter is om i.p.v. een punt op de kromme meteen een heel stuk van de kromme door dat punt te beschouwen (een zg. tak van de kromme door dat punt). Als $P = (a, b)$ op de kromme C ligt dan zijn er convergente machtreeksen $x(t) = a+a_1t+a_2t^2+ \ldots, y(t) = b+b_1t+b_2t^2+ \ldots$ zodanig dat

$F(x(t), y(t)) \equiv 0$ is, d.w.z. bij iedere t (uit convergentiegebied) hoort een punt op C in de buurt van P. Men noemt dit een parametrisatie van de kromme (beter van de tak) met P als centrum. Als we t vervangen door $t = \lambda_1\tau + \lambda_2\tau^2 + \ldots$ met $\lambda_1 \neq 0$, dan krijgen we een andere parametrisatie die we equivalent met de eerste noemen. We zullen steeds aannemen dat de parametrisatie niet-reduceerbaar is, d.w.z. dat er bij één punt in de buurt van P ook maar één waarde van t hoort (of wat minder precies: geen machtreeksen in alleen t^2 of iets dergelijks). Ieder punt is centrum van minstens één parametrisatie, doch singuliere punten kunnen van meer dan één (niet-equivalente) parametrisatiecentrum zijn. Het is beter in vele beschouwingen de punten door takken te vervangen, doch we zullen steeds over punten blijven praten, voor het gemak, hoewel we eigenlijk takken bedoelen (b.v. in de theorie der divisoren, zie onder). Als we over takken praten dan worden de birationale transformaties werkelijk zonder uitzonderingen één-éénduidig. Dit doet reeds vermoeden dat het begrip parametrisatie in het functielichaam te formuleren is. Als we een parametrisatie hebben en een rationale functie, dan krijgen we na invulling een machtreeksontwikkeling voor die functie. Begint deze met negatieve machten dan zeggen we de functie heeft in dat punt (beter die tak) een pool van de orde waarmee de machtreeks begint; begint het met positieve machten dan is er een nulpunt (van zekere orde).

Op deze manier is er aan ieder element van het functielichaam K_C (behalve aan 0) een geheel getal toegevoegd, dit blijkt juist te zijn — zoals men gemakkelijk nagaat — wat men in de algebra een valuatie noemt en wel een valuatie van K_C over k (d.w.z. aan de elementen van k is 0 toegevoegd). Men kan omgekeerd bewijzen, dat een dergelijke valuatie op een éénduidige wijze een tak van de kromme geeft.

Divisoren, lineaire systemen en vektorruimten. Laat φ wederom een rationale functie op C zijn gegeven door $G_1(X, Y)/G_2(X, Y)$ met G_1 en G_2 veeltermen in $k[X, Y]$. Laat $P_1, \ldots, P_s$ de verzameling nulpunten zijn van φ of beter de verzameling takken waar φ nul is en we nemen bovendien aan, dat we een nulpunt van bijv. de derde orde drie keer in het rijtje laten voorkomen. Zo een collectie punten (of beter takken), ieder geteld met een zekere veelvuldigheid, noemen we een puntgroep of divisor; we kunnen ook negatieve veelvuldigheden toelaten. Zijn alle veelvuldigheden positief, dan spreken we van een positieve puntgroep of divisor. Bepalen we ons voorlopig tot positieve divisoren.

De bovengenoemde puntgroep zullen we aanduiden met D_0 of

ook wel met $(\varphi)_0$. We kunnen algemener de divisor D_λ of $(\varphi)_\lambda$ bekijken van de punten (takken waar de functie φ de waarde λ aanneemt. (D_∞ is de verzameling der polen). Een andere manier om de D_λ te krijgen is om de kromme $F(X, Y) = 0$ te snijden met $G_1(X, Y) - \lambda G_2(X, Y) = 0$ (natuurlijk de snijpunten geteld met hun multipliciteit); we krijgen dan echter niet precies D_λ maar ook eventueel nog een vaste divisor D (als $F = 0$, $G_1 = 0$ en $G_2 = 0$ punten gemeen hebben). Zo een verzameling van divisoren D_λ heet een lineair systeem van divisoren en wel een lin. systeem van dimensie 1 omdat er één parameter λ is. Als we het aantal punten in de divisor (geteld met hun multipliciteiten) de graad $n(D)$ van de divisor noemen, dan leert de zg. stelling van Bezout (aantal snijpunten van kromme van graad p met kromme van graad q is $p \cdot a$), dat de graad van D_λ onafhankelijk van λ is. Uit het feit, dat de D_λ uit de λ-waarden van een rationale functie ontstaan is, volgt dat het begrip lineair systeem van divisoren een birationaal invariant begrip is. Laat algemener $G_0, \ldots, G_r$ een aantal veeltermen zijn. Beschouw de snijpunten van $F(X, Y) = 0$ met de krommen $\lambda_0 G_0(X, Y) + \ldots + \lambda_r G_r(X, Y) = 0$, we laten eventueel een vaste divisor nog weg en krijgen divisoren $D_{(\lambda)}$; dit noemt men een lineair systeem van hogere dimensie. Het is wederom een birationaal invariant begrip. Als geen enkele lin. combinatie $\lambda_0 G_0 + \ldots + \lambda_r G_r$ identiek nul wordt op C (waarvoor we altijd kunnen zorgen voor verwijdering van overtollige G_i's), dan noemen we r de dimensie van het systeem (meetkundig: door r algemeen gelegen punten gaat precies één exemplaar van het systeem; gevolg: dimensie hoogstens gelijk aan graad).

Een eenvoudige, doch belangrijke, stelling zegt dat als twee lin. systemen een gemeenschappelijk exemplaar hebben, dan is er een lin. systeem dat beide anderen als deelsystemen heeft. Hier volgt (mede op grond van bovenstaande) uit, dat ieder systeem in *één* maximaal of *compleet lin. systeem* zit. Ook berust op bovengenoemde stelling het volgende equivalentiebegrip: twee divisoren D en D' heten *lineair equivalent* als er een lineair systeem van divisoren is waar D en D' elementen van zijn. Het complete lineaire systeem waar D in zit wordt aangegeven met $|D|$.

Aangezien al deze begrippen birationaal equivalent zijn ligt het voor de hand te kijken hoe ze geformuleerd kunnen worden in het functielichaam. Beperken we ons tot de vraag: hoe vinden we $|D|$ terug in het functielichaam? We beperken ons nu echter niet meer tot positieve divisoren; als we ook negatieve divisoren toelaten, dan vormt de verzameling der divisoren blijkbaar op een

voor de hand liggende manier een abelse groep; we schrijven de groepenvermenigvuldiging dan ook additief. Als we nu bij iedere rat. functie φ een divisor $(\varphi) = (\varphi)_0 - (\varphi)_\infty$ invoeren, dan komt het boven ingevoerde lineaire equivalentiebegrip op het volgende neer:

D lin. equiv. met D' als er een functie φ bestaat zo dat $D' - D = (\varphi)$. (We kunnen dit nu als definitie nemen voor willekeurige divisoren De transitiviteit krijgen we door het produkt van de functies te. nemen.) De divisoren van $|D|$ zijn alle *positieve* divisoren van de vorm $D + (\varphi)$. Men ziet gemakkelijk, dat de verzameling functies φ zodanig dat $D + (\varphi)$ positief is, een vektorruimte vormt. Als $r(D)$ de dimensie van $|D|$ is dan is de dimensie $l(D)$ van deze vektor ruimte $L(D)$ gelijk aan $r(D)+1$. Dus het lineaire systeem op de kromme komt terug in de vorm van een vektorruimte in het functielichaam.

We merken tenslotte op, dat de berekening van de dimensie $l(D)$ het centrale probleem is in de theorie der algebraïsche krommen. We weten, dat $l(D) \leqq n(D)+1$; anderzijds volgt uit de stelling van Riemann, dat er een constante g is zodat $l(D) \geqq n(D)+1-g$ en dat er divisoren zijn, waarvoor het gelijkteken geldt. Het getal g heet het *geslacht* van de kromme en is de belangrijkste birationale invariant. (Dit invariant zijn spreekt vanzelf als het via de lin. systemen en het functielichaam wordt ingevoerd, doch in de meetkunde wordt het vaak gedefinieerd — voor krommen met hoogstens dubbelpunten met gescheiden raaklijnen — als $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d$, waarbij n de graad en d het aantal dubbelpunten van de kromme is.) Door Roch is de correctieterm $i(D) = l(D)+g-1-n(D)$ gekarakteriseerd m.b.v. de zg. differentialen. Ook deze kunnen volledig binnen het functielichaam beschreven worden, echter dit is minder éénvoudig dan het vorige. De formule van Riemann-Roch is zonder twijfel de belangrijkste stelling uit de theorie der algebraïsche krommen.

DE REKENLINIAAL OP DE SCHOLEN VOOR V.H.M.O.

door

Drs. A. B. Menk

UTRECHT

Nu bij schrijven van het College van inspecteurs is goedgevonden, dat bij het eindexamen gebruik wordt gemaakt van de rekenliniaal, zal bij velen de vraag naar boven komen wanneer men de leerlingen van het V.H.M.O. het gebruik van de rekenliniaal moet bijbrengen.

Men kan wachten tot na de behandeling van de logaritmen, of men kan reeds in de eerste klas de leerlingen de techniek van de liniaal bijbrengen en de leerlingen met de liniaal laten oefenen, en eerst na de behandeling van de logaritmen de werking van de liniaal uitleggen.

Beide methoden zijn door mij toegepast. Gedurende een tiental jaren heb ik, na de behandeling van de logaritmen, de leerlingen van de vierde klas van het gymnasium de werking van de rekenliniaal uitgelegd, en daarna de leerlingen een week lang de rekenlinialen die de school in zijn bezit had, mee naar huis gegeven om er zelf mee te oefenen. Geheel bevredigen deed mij deze methode echter niet. Wel waren er elk jaar enkele leerlingen die men na enige tijd zelf met een rekenliniaal op school zag verschijnen en die er ook een regelmatig gebruik van maakten, maar de meeste leerlingen kregen niet voldoende routine om met succes een regelmatig gebruik van de liniaal te maken.

Bovendien hebben de leerlingen van de hogere klassen geen plezier meer in het maken van gewone cijfervraagstukken, waardoor zij er niet toe komen om behoorlijk te oefenen en zodoende voldoende nauwkeurigheid en snelheid te verkrijgen om met succes van de rekenliniaal gebruik te maken.

De laatste twee jaar ben ik echter begonnen, om de leerlingen van de eerste klasse de techniek van de rekenliniaal bij te brengen. De kinderen van deze leeftijd hebben nog plezier in het maken van cijfersommen en deze kinderen zijn enthousiast bij het gebruik van de rekenliniaal; zonder enige moeite krijgt men deze kinderen er ook toe, om de resultaten, die zij verkregen hebben met behulp van de liniaal door gewoon narekenen te controleren en bij grote afwijkingen na te gaan, waar zij het verkeerd gedaan hebben. Hierdoor

bereikt men, dat deze kinderen leren, zich zelf te controleren en bovendien oefenen ze zich in nauwkeurigheid en netheid, hetgeen ook de overige vakken zeker ten goede komt.

De werkwijze, die ik hierbij gevolgd heb, is als volgt:

Gedurende een drietal lessen heb ik de techniek van het vermenigvuldigen, kwadrateren, tot de derde macht verheffen, worteltrekken en delen bijgebracht, aan de hand van een bordmodel, terwijl de kinderen zelf een rekenliniaal in de hand hadden. Oorspronkelijk was ik bang, dat het niet goed mogelijk zou zijn, een klas van 30 leerlingen tegelijk deze techniek bij te brengen; een viertal proeven, waarvan de resultaten hieronder in een tabel volgen, laten echter zien, dat dit zeer goed mogelijk is. Deze proeven zijn telkens met een week tussenpoos genomen, zonder dat de leerlingen de liniaal voor oefening mee naar huis hebben kunnen nemen.

Bij deze proeven kregen de leerlingen een stel opgaven te maken, waarbij werd aangegeven in hoeveel decimalen het antwoord moest worden gegeven. Bij de beoordeling werd een afwijking van 0 t/m 5 eenheden van de laatste decimaal nog getolereerd, terwijl een afwijking van 6 of meer eenheden van de laatste decimaal als „fout" werd beoordeeld.

Proef 1: Bereken in 2 decimalen:

$3{,}4\times 2{,}3$; $2{,}61\times 3{,}21$; $12{,}2\times 4{,}7$; $3{,}6\times 21{,}2$;
$\sqrt{47{,}7}$; $\sqrt{75{,}8}$; $\sqrt{13{,}5}$; $4{,}7^2$;
$5{,}8^2$; $9{,}1^2$; $4{,}7^3$; $3{,}2\times\sqrt{15{,}4}$;
$4{,}2\times\sqrt[3]{9{,}7}$; $\frac{8{,}5}{2{,}6}$; $\frac{9{,}7}{3{,}3}$;
$2{,}3\times 8{,}5\times 4{,}7$; $\frac{1{,}6\times\sqrt{26{,}7}}{3{,}4}$.

Proef 2:

Tijd: 30 minuten.

1. Bereken in 2 decimalen:
   $1{,}42\times 4{,}67$;
   $3{,}45\times 2{,}83$;
   $8{,}77\times 1{,}12$;
   $\sqrt{64{,}3}$;
   $\sqrt{18{,}6}$;
   $\sqrt{89{,}8}$.
2. Bereken in eenheden:
   $8{,}3^3$;
   $4{,}6^3$;
3. Bereken in 1 decimaal:
   $\frac{6{,}31}{4{,}88}$; $\frac{37{,}73}{8{,}94}$;
4. Bereken in 1 decimaal:
   $4{,}6\times 3{,}4\times 5{,}3$;
   $\frac{2{,}3\times\sqrt[3]{65{,}9}}{3{,}2}$;
   $\frac{4{,}7\times 3{,}2^2}{2{,}8}$.

Proef 3:

Tijd: 25 minuten.

1. Bereken in 2 decimalen:
   $2{,}36 \times 2{,}45$;
   $3{,}82 \times 3{,}61$;
   $\sqrt{6{,}32} \times 2{,}51$;
   $\sqrt[3]{25{,}26} \times 4{,}62$;
   $\sqrt{77{,}81}$;
   $\sqrt{32{,}42}$.
2. Bereken in eenheden:
   $7{,}56^3$;
   $4{,}92^3$.
3. Bereken in 1 decimaal:
   $\frac{8{,}56}{2{,}45}$; $\frac{49{,}16}{8{,}25}$.
4. Bereken in 1 decimaal:
   $\sqrt[3]{25{,}85} \times \sqrt{8{,}6}$;
   $\frac{\sqrt[3]{35{,}9} \times \sqrt{5{,}1}}{2{,}5}$;
   $\frac{2{,}1 \times 4{,}5^2}{3{,}9}$.

Proef 4:

Tijd: 30 min.

1. Bereken in 2 decimalen:
   $1{,}82 \times 3{,}46$;
   $4{,}92 \times 3{,}87$;
   $\sqrt{27{,}13} \times 1{,}8$;
   $\sqrt[3]{14{,}12} \times 4{,}91$;
   $\sqrt{69{,}74}$;
   $\sqrt{45{,}13}$;
2. Bereken in 1 decimaal:
   $4{,}56^3$;
   $7{,}44^3$
3. Bereken in 1 decimaal:
   $\frac{6{,}82}{4{,}24}$; $\frac{28{,}73}{5{,}92}$.
4. Bereken in 1 decimaal:
   $\sqrt[3]{49{,}27} \times \sqrt{5{,}7}$;
   $\frac{\sqrt[3]{39{,}83} \times \sqrt{3{,}67}}{3{,}2}$;
   $\frac{2{,}3^2 \times 7{,}6}{4{,}4}$.

Resultaten:

Afwijking:	0	1	2	3	4	5	fout
Proef 1 :	29,8 %	22,2 %	9,3 %	5,5 %	2,8 %	1,3 %	29,1 %
Proef 2 :	35,9 %	18,7 %	12,1 %	1,8 %	3,1 %	0,7 %	27,7 %
Proef 3 :	28,6 %	30,8 %	5,9 %	4,6 %	2,2 %	3,1 %	24,8 %
Proef 4 :	44,1 %	25,7 %	7,1 %	3,8 %	3 %	2,4 %	13,9 %

Uit bovenstaande tabel ziet men een steeds grotere nauwkeurigheid ontstaan in de uitkomsten.

Het enige, dat mij bij de eerste drie proeven opviel was, dat het percentage dat als fout werd aangerekend, slechts weinig afnam. Bij nadere controle bleek mij, dat een zeer belangrijk deel van de fouten steeds gemaakt werd door dezelfde drie leerlingen.

Tussen de derde en de vierde proef zijn deze leerlingen apart genomen, om na te gaan, wat de oorzaak van de fouten was. Hierbij bleek dat deze kinderen, hoewel ze de techniek wel kenden, en ook met de indeling van de liniaal volkomen vertrouwd bleken te zijn, toch steeds verkeerd instelden. Uitdrukkelijk is er toen nog eens gewezen op de noodzaak van nauwkeurigheid, het resultaat is in de vierde proef ook duidelijk te zien in een aanmerkelijke daling van het percentage „fout".

Mijn conclusie uit een en ander is:

a) Het heeft grote voordelen om reeds in de eerste klas van het V.H.M.O. de leerlingen de techniek van de rekenliniaal bij te brengen, daar de nog jonge leerlingen met veel animo de nodige oefenvraagstukken maken en zodoende snel de vereiste routine verkrijgen.
b) Men kan dan direct bij de aanvang van de natuurkundelessen gebruik van de liniaal laten maken, hetgeen een belangrijke tijdsbesparing met zich meebrengt. Hetzelfde geldt voor de trigonometrie.
c) Regelmatig kan men het gebruik van de liniaal uitbreiden, en na de behandeling van de logaritmen moet men de samenstelling van de rekenliniaal verklaren.
d) Om een zo goed mogelijk resultaat te bereiken zal men de liniaal voor de leerlingen verplicht moeten stellen. De leerlingen kunnen dan ook thuis oefenen. Gezien de belangstelling, die de kinderen voor het werken met de rekenliniaal hebben, behoeft men niet bang te zijn, dat zij de opgegeven opgaven niet met de liniaal zullen uitrekenen.
e) Het verdient aanbeveling om die leerlingen, die blijken, na enige tijd nog geen voldoende nauwkeurigheid verkregen te hebben, apart te nemen. Geen enkele leerling heeft blijk gegeven beslist niet met de rekenliniaal te kunnen werken.

STUDIEDAGEN TE ARLON

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

OOSTERBEEK

Voor de vierde keer heeft de Belgische regering drie studiedagen te Arlon georganiseerd. De eerste keer, in 1959, werden de verzamelingen behandeld, het jaar daarop functies en relaties en bovendien het begrip continuïteit, het derde jaar de groepen en thans de beginselen van de lineaire algebra, waaronder begrepen lineaire afbeeldingen en toepassingen op het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen. Zoals altijd werden de inleidingen gehouden door prof. G. Papy, ditmaal geassisteerd door de heer Holvoet. De ochtenden werden besteed aan voordrachten, de middagen aan demonstratielessen, oefeningen, e.d. Het is niet goed mogelijk in Euclides een verslag te geven van het behandelde. Dit zou of te compact worden of vrijwel een geheel nummer vullen. Bovendien zal een groot deel van de inhoud van de voordrachten afgedrukt worden in Wiskunde in de 20e eeuw II, zodat belangstellenden er toch kennis van kunnen nemen.

Dat ik desondanks iets over deze studiedagen in Euclides wil schrijven komt daardoor, dat ik er prijs op stel de lezers iets mee te delen over hetgeen in België op het gebied van onderwijsvernieuwing gedaan wordt. Over de organisatievorm van deze studiedagen kunt u een en ander lezen in het verslag, dat twee jaar geleden uitgebracht is (Euclides 36, p. 65). Het aantal deelnemers stijgt met het jaar; ditmaal waren er 500, zodat de lezingen in de kazerne gehouden moesten worden. De activiteiten van de Belgen beperkt zich echter niet tot deze studiedagen. Brandenburg en Thijssen hebben u reeds tweemaal verslag kunnen uitbrengen van de zg. Vervolmakingscursus, die elk jaar in Brussel gehouden wordt sedert 1960 (Euclides 36, p. 289, en 37, p. 241). Verder worden door het Belgische pedagogische centrum voor de wiskunde cursussen georganiseerd om de leraren te herscholen. Het afgelopen jaar is daarmee begonnen. In zeventien plaatsen werden lessen gegeven in de theorie van de verzamelingen en de groepentheorie. De lessen worden gegeven op donderdagmiddag; het rooster voor de leraren wordt zo ingericht, dat ze deze middag vrij hebben. De cursus

bestaat uit twintig middagen, elke middag een uur les en een uur oefeningen. U raadt niet gemakkelijk, hoeveel leraren aan deze cursussen hebben deelgenomen; het waren er duizend! Volledigheidshalve merk ik op, dat dit niet alleen leraren van het middelbaar onderwijs, maar ook van het technisch onderwijs zijn. Dit jaar wordt een dergelijke cursus gegeven over eerste elementen van de moderne wiskunde en meetkundige toepassingen van de groepentheorie.

Totnogtoe heb ik alleen vermeld de instructies, die leraren kunnen krijgen. De uiteindelijke bedoeling is natuurlijk, dat het onderwijs hiervan profijt zal hebben. Men tracht dan ook reeds moderne methoden bij wijze van proef in het onderwijs te incorporeren. Dit gebeurt niet aan de hand van door een centrale commissie opgestelde teksten en ook niet in de hogere klassen van het M.O., omdat men gebonden is aan de exameneisen. Blijft over het door sommige leraren geven van lessen volgens moderne methoden in de laagste klassen van de middelbare school met behulp van door henzelf samengestelde teksten. Hoewel dit nog slechts een bescheiden begin is van hetgeen zal moeten geschieden, is het ten minste een begin!

De eerste studiedag was ik getuige van een les, die door collega Delmotte uit Binche gegeven werd aan zijn eigen leerlingen, die speciaal voor dit doel naar Arlon gebracht waren. Van deze les wil ik gaarne een overzicht geven. Vooraf zij vermeld, dat collega Delmotte een uitstekend docent is.

De les begon met een resumé van enkele dingen, die het afgelopen jaar behandeld waren. In het platte vlak wordt een punt O gekozen. Dit punt is het vaste beginpunt van vectoren. Deze vectoren vormen een groep t.o.v. de optelling, d.w.z. de verzameling V van de vectoren is afgesloten t.o.v. de optelling, de bewerking optellen is associatief, er is een nulelement, elke vector heeft een tegengestelde. Notatie: $V, +$. Bovendien is de groep commutatief. Tot zover het resumé.

Nu nemen we weer een plat vlak en kiezen daarin een punt O. Analoog aan de optelling van vectoren wordt een optelling van punten gedefinieerd. Zie fig. 1 en, voor het geval de beide punten met O collineair zijn, fig. 2. We hebben hierdoor verkregen het vlak $\pi_0, +$. De punten van het vlak vormen een groep t.o.v. de optelling, die commutatief is. Verificatie hiervan biedt geen speciale moeilijkheden voor de leerlingen.

Nu kiezen we een rechte lijn S, die door het punt O gaat. We vragen ons af, wat de verzameling van de punten $a + s$ is, waarin a vast is en s de lijn S doorloopt. Kies s op S; volgens de definitie

van optellen is $a + s$ dan een punt, dat ligt op de lijn door het punt O evenwijdig aan de lijn S. Kies omgekeerd een punt p op deze lijn. Dit punt kan men ontstaan denken als som van a en een punt van S. (Toen Delmotte de klas vroeg, wat men nu kon zeggen van een

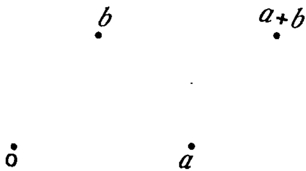


fig. 1.

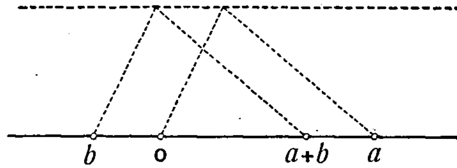


fig. 2.

willekeurig punt van de gevonden lijn, kwamen uit de mond van een van de leerlingen de woorden „provient de", d.w.z. deze leerling begreep, dat nu gezegd moest worden, dat dit punt ontstond uit enz., hetgeen door de toehoorders wel als een opmerkelijke prestatie werd beschouwd). De gevonden lijn is dus inderdaad de verzameling van de sommen van a en punten van S. Notatie: $a + S$. Zie fig. 3.

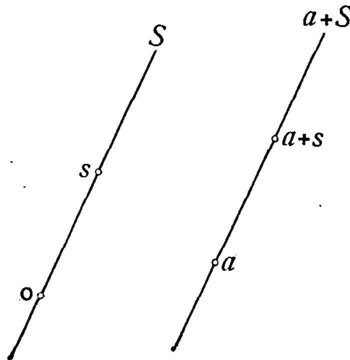


fig. 3.

Nu gaan we een stap verder. Neem twee lijnen, $a + S$ en $b + S$, en zoek de verzamelingen van de sommen van twee punten, die op deze twee lijnen liggen. Kies dus een punt p op $a + S$ en een punt q op $b + S$ en zoek de verzameling van de punten $p + q$. We merken eerst op:

p is de som van a en een punt s_1 op S, krachtens hetgeen we hierboven gevonden hebben (bij: „provient de"),

q is de som van b en een punt s_2 op S,

en dus is

$$p + q = (a + s_1) + (b + s_2).$$

Volgens de eigenschappen van deze optelling (commutatieve en associatieve eigenschap) is dan

$$p + q = a + b + (s_1 + s_2).$$

Hierin is $s_1 + s_2$ een punt, dat op S ligt, omdat zowel s_1 als s_2 op S liggen. Dus is

$$p + q = a + b + s_3,$$

waarin s_3 op S ligt, d.w.z. $p + q$ ligt op de lijn door het punt $a + b$ evenwijdig aan S getrokken (fig. 4).

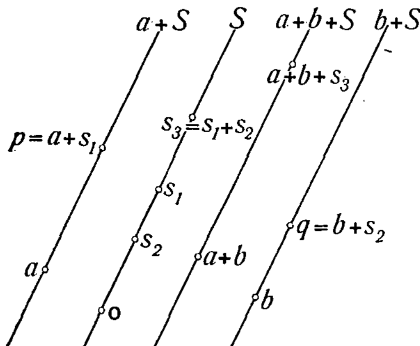


fig. 4.

Op deze wijze is dus een optelling tot stand gebracht tussen de lijnen $a + S$. De som van twee dergelijke lijnen is weer zo'n lijn, gedefinieerd volgens

$$(a + S) + (b + S) = a + b + S.$$

De lijnen vormen t.o.v. deze optelling weer een groep. Immers de som van twee van de lijnen is weer zo'n lijn. Is er een nulelement?

Tot hier hadden de leerlingen het betoog gevolgd en steeds antwoord weten te geven op de gestelde vragen. Dat de som van de twee lijnen $a + S$ en $b + S$ weer een lijn evenwijdig aan S was, ging er nog net in. De les had nu echter al 60 minuten geduurd en de grens was bereikt. Op de vraag of er een nulelement was, kwam geen antwoord meer. En collega Delmotte was zo wijs niet door te drukken en niet de vraag zelf te beantwoorden. Hij staakte de les.

Ik heb deze les een indrukwekkend staaltje gevonden van wat met jonge kinderen op dit gebied te bereiken is en ook van de gaven van collega Delmotte.

Ik wil besluiten met op te merken, dat we weliswaar niet klakke-

loos moeten navolgen, wat onze zuiderburen doen, maar dat we veel van hen leren kunnen en dat ze ons op dit moment beslist vooruit zijn, althans wat hun praktische activiteiten betreft.

Opmerking. Voor de wiskundige is het de moeite waard de les van Delmotte in rijpere taal over te brengen. De groep S, $+$ is een ondergroep van de groep $\pi_0, +$, en wel, omdat deze groep abels is, een normale deler. De verzamelingen $a + S$ zijn de nevenklassen van S. Omdat S, $+$ een normale deler is, vormen deze nevenklassen een groep.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

DELFT

LII. *Een meetkundig vraagstuk van* Multatuli.

Het is wel bekend dat Multatuli's veelzijdige belangstelling hem ook met de wiskunde in aanraking bracht. In no. 529 van zijn *Ideeën* (2e bundel, 1867) treffen wij een tekening aan die een bewijs van de stelling van Pythagoras inhoudt. In de uitgave van 1872 merkt de schrijver op dat niemand hem de vinding heeft betwist. Hij was op zijn vondst trots genoeg om de figuur op zijn zegelring te laten graveren. Later is wel gebleken dat de gedachtengang van het bewijs al van oudere datum is. [1])

Op een andere wiskundige bezigheid van Multatuli werd de aandacht gevestigd in een opstel dat op 17 februari 1962 in de Nieuwe Rotterdamse Courant verscheen. De schrijver, dr. G. W. Huygens, was zo vriendelijk mij nadere inlichtingen te geven over de vindplaats. De bewuste passage komt voor in de correspondentie die Multatuli in zijn laatste levensjaren met zijn vriend Roorda van Eysinga voerde. Zij gaat vergezeld van de tekening van een rechthoekige driehoek, waarin de bissectrices van de scherpe hoeken zijn getrokken en luidt als volgt [2]):

---

[1]) K. Vos, Multatuli en het theorama van Pythagoras. N.T.v.W. 8, 1920—21, 265—268.

[2]) Briefwisseling tusschen Multatuli en S. E. W. Roorda van Eijsinga, uitgegeven door M. Douwes Dekker, geb. Hamminck Schepel. (Amsterdam, 1907), pg. 364. De betrokken brief, 22 augustus 1886 te Nieder-Ingelheim geschreven, is de laatste uit de collectie. Multatuli is op 19 februari 1887 overleden.

„De gestippelde lijnen zijn gegeven. Ze deelen de scherpe hoeken in twee gelijke deelen. Vrage: hoe construeert men den driehoek? 't Is kwestieus of het kàn. Maar juist dit prikkelt mij. Ik hel over tot de meening dat het niet kan. Maar dan zoek ik naar formuleering der gronden van die onmogelijkheid, 't geen bij mij gelijken rang van slagen heeft als 'n oplossing."

Multatuli vermeldt niet hoe hij aan het vraagstuk is gekomen. De wijze waarop hij het redigeert is verrassend correct, als wij aannemen dat hij het construeren in de klassieke zin, met passer en lineaal bedoeld zal hebben. Hij beseft dat zowel de uitvoering der constructie als ook het bewijs van haar onmogelijkheid de gestelde vraag definitief beantwoorden. Dat in zijn tijd een amateur als Douwes Dekker dit bewijs niet kon leveren is waarlijk niet te verwonderen.

Zij (fig. 1) ABC de in C rechthoekige driehoek; d_1 en d_2 zijn de bissectrices uit A en B. Men heeft $d_1 \cos \frac{\alpha}{2} = b = c \cos \alpha$ en

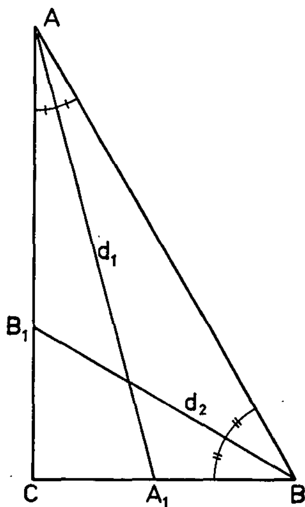


Fig. 1.

$d_2 \cos \frac{\beta}{2} = a = c \sin \alpha$, waaruit volgt

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\cos \alpha . \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \frac{\alpha}{2} . \sin \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Stellen wij nu de verhouding $\frac{d_1}{d_2}$ der gegeven bissectrices door p voor ($p>0$) en kiezen wij $tg\,\frac{\alpha}{2}=u$ als onbekende, dan komt er

$$(1-u^2)(1+u)=2p\,u\,\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waarbij dan nog $0<u<1$ moet gelden.

De grafiek van het linkerlid heeft de in fig. 2 geschetste gedaante, die van het rechterlid is een rechte door O die in het eerste en derde kwadrant ligt. De vergelijking (2) heeft dus voor elke waarde van p één tussen 0 en 1 gelegen wortel. Daaruit volgt weer dat er bij elke gegeven d_1 en d_2 een driehoek bestaat, die aan de vraag voldoet.

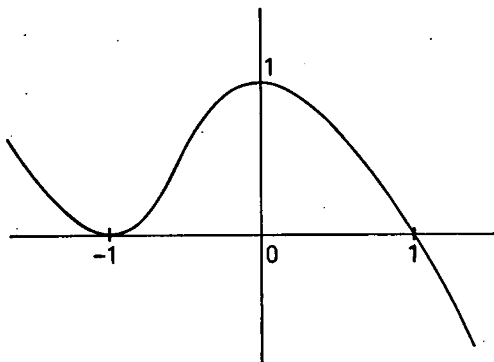


Fig. 2.

De vergelijking (2) is van de derde graad en de bepaling der wortel met passer en lineaal is dus alleen dan mogelijk als de vergelijking reducibel is in het lichaam der coëfficiënten. Stellen wij nog $2p\sqrt{2}-1=q\,(q>-1)$ dan luidt zij

$$u^3+u^2+qu-1=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

De onmogelijkheid der constructie is aangetoond als (3) voor enige waarde van q irreducibel is. Wij nemen voor q een geheel getal. Volgens een lemma van Gausz kan het linkerlid in het geval der reducibiliteit in twee factoren met *gehele* coëfficiënten ontbonden worden.

Een produkt

$$(u+r_1)(u^2+r_2u+r_3)$$

met gehele r_1, r_2 en r_3 kan echter zoals men gemakkelijk nagaat alleen dan met het linkerlid van (3) identiek zijn als $q=-1$ is.

Het vermoeden van Multatuli betreffende de onmogelijkheid van de constructie is daarmee aangetoond.

Natuurlijk kan men wel bijzondere waarden van p aangeven waarvoor de constructie kan worden uitgevoerd. Een eenvoudig voorbeeld is $p=1$, dus $q=2\sqrt{2}-1$. Dan heeft men voor (3):

$$u^3+u^2+(2\sqrt{2}-1)u-1=(u-\sqrt{2}+1)(u^2+u\sqrt{2}+\sqrt{2}+1)=0$$

met als wortel $u=\sqrt{2}-1=tg\frac{\pi}{8}$. De reële oplossing is de rechthoekig-gelijkbenige driehoek.

Een bekende opgave is de constructie van een driehoek waarvan de *drie* bissectrices gegeven zijn. Aan dit probleem werden in het laatst der vorige eeuw, na de dood van Multatuli overigens, verscheidene artikelen gewijd. In ons land schreef F. J. van den Berg [1]) er een opstel over, waarbij hij de opgave herleidde tot een vergelijking van de 16de graad.

Korselt [2]) leidde enige tijd later voor zijn onbekende een vergelijking van de 10de graad af, bewees dat zij irreducibel is en toonde daarmee de onmogelijkheid der constructie aan. In jongere tijd komt het probleem in de aandacht terug [3]). Het bijzondere geval waarbij twee der bissectrices gelijk zijn is bij de beschouwingen meer dan eens aan de orde, maar het vraagstuk van Multatuli zijn wij er niet in tegengekomen.

---

1) F. J. van den Berg, Over de bepaling van een driehoek, waarvan de lengten der drie hoekdeellijnen gegeven zijn. N. Arch. v. W. *16* (1889) 179—199.

2) A. Korselt, Über das Problem der Winkelhalbierenden. Z.f. Math. u. Ph. *42* (1897), 304—312.

3) F. Neisz, Über die Unmoglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkelhalbierenden, J.f. reine u. angew. Math. 177 (1937), 129—133;
H. Wolff, Über die Bestimmung eines ebenen Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, id. 134—151; B. L. v. d. Waerden, Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden, id. 179 (1938), 65—68.

DIDACTISCHE LITERATUUR UIT BUITENLANDSE TIJDSCHRIFTEN

door

Dr. JOH. H. WANSINK

ARNHEM

1. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* (XLI, 217; oct.—nov. 1961).

J. Colmez, La structure des mathématiques modernes;
J. Balibar, Un exemple d'abstraction, de formalisme et de métatheorie;
Cl. Pair, Une expérience d'enseignement des notions modernes;
J. Dixmier, A propos de quantificateurs;
Poitou, Matériaux pour un dictionnaire;
A. N. Kolmogorov, La profession de mathématicien (suite).
Modalités du certificat d'aptitude pédagogique pour les C.E.G.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignements Public (XLI, 221; mars 1962).
1. La vie de l'Association;
2. L'assemblée générale 1962;
3. Quatre pas dans les nuages, par G. Walusinski.

2. *Praxis der Mathematik* (IV, 2; Februar 1962).

H.Töpfer, Zur Reform des Mathematikunterrichts;
B. Kyewski, Zum 450. Geburtstag Gerhard Mercators;
A. Rohrberg, Der Kettensatz — ein Beispiel aus der Wirtschaftsmathematik;
P. Ruopp, Fibonacci-Folgen im Rechnen;
W. D. Meisel, Nochmals: $(-1).(-1)=1$; Konvention oder Satz?
H. Gall, Praktisches Lösen linearer Gleichungssysteme.

Praxis der Mathematik (IV, 3; März 1962).
O. Becker, Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden II: die späteren Pyramiden;
I. Paasche, Äquidistante Punkte auf Parallelen;
P. Krauns, Eine Extremwertaufgabe aus der Wirtschaft;
Kl. Wigand, Neuere Algebra in der Unterstufe;
R. Leupold, Zur Radialbeschleunigung einer gleichförmigen Kreisbewegung;
F. Ostermann, Über die Nullstellen einer kubischen Gleichung.

Praxis der Mathematik (IV, 4; April 1962).
H. Athen, Lineare Algebra und Vektorgeometrie;
K. Vogel, 500 Jahre deutsche Algebra;
H. Siemon, Zur vollständigen Induktion;
K. Schuler, Potenzsummen und ihre Beziehungen;
A. Engel, Mathematik und Sport;

K. Hanke, Stereometrische Merkwürdigkeiten;
P. Knabe, Mathematik und abstrakte Kunst.

3. *Elemente der Mathematik* (XVII, 1; Jan. 1962).

L. Locher-Ernst, Von der Gedankenlosigkeit in der Behandlung der Mathematik (Fortsetzung);
P. Läuchli, Schaltalgebra;
J. Schopp, Verschärfung eines Kreisabdeckungssatzes.

Elemente der Mathematik (XVII, 2; März 1962).
L. Locher-Ernst, Neue Gestaltungen in der Behandlung der Mathematik;
W. Sierpinski, Sur une propriété des nombres triangulaires;
Sur une propriété des nombres tétraèdraux;
L. FejesToth, Dichteste Kreispackungen auf einem Zylinder;
G. Unger, Eine stereometrische Dodekaeder-Konstruktion;
A. Makowski, Some geometric inequalities.

4. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht* (XIV, 8; Jan. 1962).

R. Fleischmann, Rationale und nichtrationale Darstellung der Elektrodynamik;
J. Dzewas und O. Hahn, Eine Einführung in die Analysis mittels des Filterbegriffs (Teil II);
K. Krüse, Ein einfacher Versuch auf der schiefen Ebene zur Bestimmung der Fallbeschleunigung.

Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (XIV, 9, Febr. 1962; XIV, 10, März 1962).
H. Noack, Der Begriff der Kurve I, II;
G. Horbeck, Bemerkungen zu der Arbeit von H. Athen: die vektorielle Behandlung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades.

5. *The Mathematical Gazette* (XLV, 354; Dec. 1961).

L. Rosenhead, The teaching of mathematics in schools: a criticism of the English educational system;
M. H. A. Newman, Modern mathematics and the schoolcurriculum;
R. C. H. Tanner, Mathematics begins with inequality;
J. K. Brunton, Polygonal knots;
E. H. Sondheimer, The mathematical description of nature;
L. Long, On Fermat's last problem.

The Mathematical Gazette (XLV, 355; Febr. 1962).
R. North, On functions which form a group;
T. M. Flett, The evaluation of definite integrals as the limits of sums;
E. T. Steller, Should there be a choice of questions in an examination paper?
R. A. Rankin, Change of variable in an indefinite integral;
R. L. Goodstein, Truth tables;
J. E. Littlewood, Return to 1941;
W. More, Early Nineteenth Century Mathematics.

6. *School Science and Mathematics* (LXII, 1, 543; Jan. 1962).
Doyne Holder, Polynomials, factorable or non factorable;
G. H. Miller, Mathematics Education in Europe;

L. de Jong, Mathematics crosswords;
V. E. Alexander, Sex differences in seventh grade problem solving.

School Science and Mathematics (LVII,2, 544; Febr. 1962).
Cecil B. Read, Challenging the impossible;
M. F. Willerding, Mathematics education in the U.S.S.R.; an annotated bibliography.

School Science and Mathematics (LXII, 3, 545; March 1962).
Donovan A. Johnson, Teaching machines and programmed learning;
A. C. King and C. B. Read, A study through biographics of the history of the elementary concepts of probability;
D. Rappoport, Some misconceptions in arithmetic;
E. J. Haga, History of digital computing devices;
M. F. Willerding, A critical look at the new mathematics for seventh grade.

School Science of Mathematics (LXII, 4, 546, April 1962).
P. F. Ploutz, Science and mathematics — the case for professional organizations;
D. Rappoport, The meaning of fractions;
A. Vavoulis, Teaching the linear equation in intermediate algebra..

7. *The mathematics Teacher* (LV, 1, Jan. 1962).

A. E. Taylor, Convention and revolt in mathematics;
L. Ringenberg, Infinite decimals;
Ph. J. Runkel, Quantification in the social sciences.

The mathematics Teacher (LV, 2, Febr. 1962).
R. A. Dean, Group theory for school mathematics;
J. Mcclellan, The construction of skeletal polyhedra;
R. C. Yates, Regular Polygons;
T. Sampson, Tests in algebra;
P. Harris, What did the students think?
C. B. Bayer, Viète's use of decimal fractions;
C. B. Read, An arithmetic-algebra test of the period 1825;
A. R. Osborne, Using the overhead projector in an algebra class.

The mathematics Teacher (LV, 3, March 1962).
R. Dubish, Applications of finite arithmetic (III);
A. A. Albert, Finite planes for the high school;
G. L. Bayer, Setting up an approximate anti-log-table;
C. Ash, Locus proofs;
J. Adkins, Are students' questions a valid criterion for evaluating creative teaching?
L. A. Dwight, A summer program in mathematics for high-ability secondary students;
H. D. Allen, Understanding through number systems;
K. W. Wegner, Mathematics in Taiwan.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR HET STAATSEXAMEN GYMNASIUM A EN B IN 1961

Wiskunde

Aangaande de resultaten van de dit jaar afgenomen examens, kan de subcommissie mededelen, dat het gemiddelde der cijfers door de A-kandidaten behaald, voor de algebra en het keuze-onderwerp 5,1 bedraagt (vorig jaar 5,6) en voor de meetkunde 5,3 (4,8).

Voor de B-kandidaten zijn deze gemiddelden: voor de algebra 5,7 (6,3), voor de stereometrie 4,7 (5,3) en voor de goniometrie en de analytische meetkunde 5,9 (5,2).

Dit jaar konden de A-kandidaten voor het onderdeel VIa uit een vijftal onderwerpen kiezen. Hierbij moet worden opgemerkt, dat de lineaire en kwadratische functies met de vierkantsvergelijkingen, onafhankelijk van de gedane keuze, tot de examenstof behoren.

Volledigheidshalve zijn de verschillende mogelijkheden, waaruit gekozen kan worden, hieronder vermeld:

1. de overige in het K.B. van 30 augustus 1958, Stb. 431, voorgeschreven stof voor de algebra in klasse I—IV, met uitzondering van de logaritmen en de rijen;
2. logaritmen, rekenkundige en meetkundige rijen met een eindig aantal termen;
3. de beginselen van de differentiaalrekening;
4. hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde, te weten: de Egyptische en de Babylonische wiskunde en de Griekse wiskunde tot en met Euclides „Elementen" boek I;
5. de beginselen van de statistiek.

153 kandidaten gaven onderwerp 1 op; 60 bepaalden hun keuze op onderwerp 2, terwijl respectievelijk 17, 25 en 2 kandidaten de nummers 3, 4 en 5 kozen.

Uit de examens, die werden afgelegd door degenen, die zich voor de leerstof van de klassen I—IV hadden voorbereid, bleek vaak, dat zij zich bij hun studie tot de vierkantsvergelijkingen en de lineaire en kwadratische functies hadden beperkt. Dit is stellig niet de bedoeling van het betreffende K.B. Er kunnen wel degelijk vragen worden gesteld over b.v. valse en identieke vergelijkingen, over strijdigheid en afhankelijkheid van stelsels vergelijkingen en over wortelvormen.

Waarom $\sqrt{a^2} = |a|$ is en dergelijke vragen konden vaak niet bevredigend beantwoord worden.

Voorts bleek, dat vrijwel alle A-kandidaten, die de differentiaalrekening hadden gekozen, door gebrek aan inzicht en training bedroevende resultaten bij de examens in dit onderdeel behaalden.

Voor de meetkunde kon men òf de planimetrie òf de stereometrie kiezen. 160 kandidaten hadden hun keuze op het eerste en 97 op het tweede onderwerp bepaald.

Natuurlijk moeten degenen die de stereometrie kiezen, de hiervoor noodzakelijke kennis van de planimetrie bezitten, al worden hun geen specifiek planimetrische problemen voorgelegd. De opmerkingen, die de subcommissie in het verslag over 1960 had gemaakt omtrent de examenstof voor de planimetrie, waren lang niet tot alle kandidaten doorgedrongen. In dat verslag werd uitdrukkelijk opgemerkt, dat de goniometrische verhoudingen van de hoeken tussen 0° en 180°, de sinus- en de

cosinusregel, eenvoudige toepassingen hiervan en de formules $a = 2R\sin\alpha$ en $O = \frac{1}{2}\, ab\sin\alpha$ ter sprake kunnen komen.

Hoewel de meesten de planimetrie als keuzevak hadden opgegeven, bleek tijdens het examen, dat eenvoudige constructies, zoals bijv. de constructie van de middelevenredige van twee gegeven lijnstukken en de zogenaamde basis-tophoek-constructie, hun volslagen onbekend waren. Het verband tussen hoeken en cirkelbogen, koordenvierhoeken en de macht van een punt ten opzichte van een cirkel waren sommigen bij hun studie blijkbaar nooit tegengekomen. Dat examens van dergelijke kandidaten geen bevredigende resultaten opleverden, spreekt wel vanzelf.

Wat de B-kandidaten betreft wil de subcommissie zich tot enkele opmerkingen beperken.

Bij het bepalen van de extreme waarden van een goniometrische functie werd soms volstaan met het bepalen van de hoeken, waarvoor de eerste afgeleide nul wordt. Een nader onderzoek of inderdaad een extreem ontstaat bleef in verscheidene gevallen achterwege. Voorts dient men, indien een functie in een afgesloten interval gedefinieerd is, bij de bepaling van de grootste en de kleinste waarde, de waarden van de functie aan de grens van het interval in het onderzoek te betrekken.

Indien men de vergelijking van een meetkundige plaats (verzameling) heeft gevonden, wordt geëist, dat men de aard van de meetkundige plaats bepaalt. De cirkelbundels behoren stellig tot de examenstof, terwijl ook bekend wordt verondersteld, dat een cirkel en een rechte lijn een cirkelbundel bepalen. Het schriftelijk examen stereometrie was in de meeste gevallen zeer teleurstellend.

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE VOOR DE STAATSEXAMENS H.B.S. A EN B IN 1961

Wiskunde I

h.b.s.-B.

Het aantal kandidaten, dat bij het schriftelijk examen een voldoend of hoger cijfer wist te behalen, was dit jaar groter dan vorige jaren.

Het mondeling examen had een minder bevredigend verloop. Vele kandidaten vermochten niet veel meer dan uit het hoofd geleerde formules toepassen. Het afleiden van de gebruikte formules liet zeer veel te wensen over. Sommigen konden slechts een grafiek van een functie maken door een constructie punt voor punt, terwijl toch geëist mag worden, dat men dit doet met behulp van de vooraf bepaalde nulpunten, extrema en asymptoten.

Het werken met absolute waarden en met ongelijkheden dient beter beoefend te worden Bij de reeksen was het werken met de symbolen S_k en t_k voor zeer velen een struikelblok.

Wiskunde II

h.b.s.-B.

De subcommissie voor Wiskunde II is van mening, dat de resultaten van de kandidaten voor het Staatsexamen h.b.s.-B hoger lagen dan de vorige jaren, zoals dit ook bij de schoolexamens het geval was. Hieraan is het feit dat voor de eerste maal analytische meetkunde werd geëxamineerd niet vreemd, zodat de conclusie dat de prestaties van de kandidaten zich in stijgende lijn bewegen, zeker voorbarig moet

worden genoemd. Wat dit vak betreft, meent de subcommissie — in het bijzonder naar aanleiding van de mondelinge examens — de volgende opmerkingen te moeten maken:

1. Voor vele kandidaten was het schetsen van een kegelsnede, gegeven door een eenvoudige vergelijking als

$$y^2=8x,\ y^2 \pm 2x^2=8,\ xy=8$$

en het bepalen van toppen en brandpunten een erg tijdrovende aangelegenheid, waardoor de aanloop tot een vraagstukje of theorievraag te lang duurde.
2. Het is nooit de bedoeling dat hetgeen eenvoudig is in te zien door ingewikkelde berekeningen wordt achterhaald. Vele kandidaten vluchtten als het ware in de formules, al of niet goed van buiten geleerd.
3. Reeds bij het schriftelijk examen, maar in het bijzonder bij de mondelinge examens, bleken vele kandidaten te weinig van figuren te benutten. Dit moet mede als gevolg beschouwd worden van het onder 1. opgemerkte.

Bij het mondeling onderzoek in de stereometrie bleken vele kandidaten de eenvoudigste meetkundige plaatsen niet — of onvolledig — tot hun beschikking te hebben. Zo werd als meetkundige plaats van de punten die evenver van twee gegeven punten A en B verwijderd zijn, meestal gesproken van de ,,middelloodlijn van AB", in plaats van ,,het middelloodvlak van AB".

h.b.s.-A.

Verschillende kandidaten hebben bij het schriftelijk werk de antwoorden niet of niet voldoende gemotiveerd. Het vraagstuk over de logaritmen is door de meeste kandidaten verkeerd aangepakt. Blijkbaar heeft men zich te weinig gerealiseerd in welke gevallen men de eigenschappen van de logaritmen kan toepassen.

Wat het meetkundewerk betreft: het verdient aanbeveling de figuren zo te tekenen, dat ze zo goed mogelijk aan de gegevens voldoen, ook wanneer niet uitdrukkelijk de constructie gevraagd wordt.

Bij het mondeling examen is gebleken, dat verschillende kandidaten de mening zijn toegedaan, dat de beginselen van de goniometrie buiten het examenprogramma vallen, ondanks het feit, dat in het verslag van 1960 uitdrukkelijk gesteld is, dat ook deze goniometrie tot het programma behoort. Het examen omvat nl. de leerstof van de eerste drie klassen van de vijfjarige h.b.s.

Bij vele kandidaten liet de kennis van functies en grafieken zeer veel te wensen over.

Mechanica

h.b.s.-B.

Als geheel genomen liggen de cijfers voor het schriftelijk werk, mede dank zij de geringere omvang, hoger dan in voorgaande jaren. Bij vele kandidaten, die mondeling examen moesten afleggen, vielen echter de prestaties tegen: er moest worden geconstateerd, dat velen van hen weinig hadden begrepen van de methodes die moeten worden toegepast bij het oplossen van een eenvoudig probleem. Het is niet voldoende dat de kandidaten slechts beschikken over een zekere — dikwijls nog gebrekkige — technische vaardigheid. Dit zal ook gelden wanneer vanaf 1963 bij het eindexamen h.b.s.-B de stof van de mechanica zal zijn geïncorporeerd in de natuurkunde.

WIMECOS

NOTULEN van de ALGEMENE VERGADERING
op 28 december 1961 in „ESPLANADE" te Utrecht.

De voorzitter dr. Joh. H. Wansink opent te 10,40 de vergadering en heet de aanwezigen, in het bijzonder de gasten, onder wie de vertegenwoordigers der zusterverenigingen, hartelijk welkom.

Deze gasten zijn mr. ir. M. Goote, inspecteur-generaal van het onderwijs, de inspecteurs dr. W. H. Capel, dr. H. A. Gribnau en dr. D. N. van der Neut. Van de chef van de afdeling V.H.M.O., dr. J. A. A. Verlinden is bericht van verhindering binnen gekomen. Ook de ereleden P. Wijdenes en drs. A. J. S. van Dam zijn present.

Liwenagel is vertegenwoordigd door de heer D. Leujes, Velebi door de heer drs. A. G. M. Oude Vrielink, de wiskundewerkgroep van de W.V.O. door de heer drs. Hermen J. Jacobs. Van Velines is bericht van verhindering met goede wensen voor de vergadering.

Het bestuurslid dr. P. G. J. Vredenduin is met kennisgeving afwezig. Er zijn geen buitenlandse gasten.

Daarna verwelkomt de voorzitter de spreker in de ochtendvergadering prof. dr. O. Bottema.

In zijn openingswoord wijst de voorzitter nog op de volgende punten:

a. Het verdwijnen van de mechanica als zelfstandig leervak.

b. Onze voldoening over de circulaire van 7 juni 1961 van de staatssecretaris, waaruit blijkt dat van de vrijgekomen uren van de mechanica vanaf de cursus 1961/62 er één zal toevallen aan de wiskunde en één aan de natuurkunde (in de 4e klas), terwijl in de cursus 1962/63 in de 5e klas de twee uur aan de natuurkunde zullen komen. Voor de exacte vakken is dus het totaal aantal uren constant gebleven.

c. Het gevaar dat de kosmografie bedreigt, nu dit vak in de z.g. Mammoetwet niet onder de verplichte vakken voorkomt. Hij wijst op de activiteit van Wimecos in deze (Euclides XXXVII, 120).

d. het instellen van de commissie Leeman inzake de modernisering van het wiskunde-onderwijs.

e. de oprichting van het wiskundetijdschrift voor jongeren „Pythagoras", dat reeds meer dan 12000 abonnees telt. Hij huldigt de initiatiefnemers broeder Erich en de heer Krooshof, waarmede de vergadering door applaus instemt.

f. de goede samenwerking met de zusterorganisaties.

Daarna worden de notulen van de jaarvergadering van 28 december 1960 en de jaarverslagen van de secretaris, de penningmeester, van de kascommissie, de redactie van „Euclides" en van de commissie voor de leesportefeuille goedgekeurd.

De penningmeester wordt gedechargeerd en in de nieuwe kascommissie worden benoemd de heren B. Kleefstra en A. N. F. Saeijs, beiden te Haarlem.

Zonder discussie wordt het bestuursvoorstel om „Euclides" ook tot officieel orgaan van de wiskunde-werkgroep te maken goedgekeurd. De voorzitter van de werkgroep spreekt hierop een woord van dank tot de vergadering en, huldigt dr. Wansink voor zijn vele activiteiten inzake het wiskundeonderwijs en de

samenwerking der lerarenorganisaties.

Als extra-agendapunt is nu het verlenen van het erelidmaatschap aan prof. dr. O. Bottema aan de orde.

De voorzitter memoreert diens grote verdiensten voor de wiskunde en vooral zijn belangstelling voor het wiskundeonderwijs op de scholen voor V.H.M.O. zoals die vooral blijkt uit zijn medewerking aan „Euclides" in de vorm der „Verscheidenheden".

Nadat prof. Bottema zijn dank voor de hem verleende onderscheiding heeft uitgesproken, is de bestuursverkiezing aan de orde. In de vacature—de Jong wordt de heer drs. J. D. de Jong herkozen, terwijl de heer drs. H. W. Lenstra te Groningen de heer dr. Joh. H. Wansink in het bestuur zal opvolgen.

Nadat de secretaris enige woorden van afscheid tot de voorzitter heeft gesproken, houdt prof. Bottema zijn voordracht over de „De stelling van Pompeiü".

Alle hoorders zijn onder de indruk van de voortreffelijke kwaliteiten van deze voordracht.

Nadat de voorzitter nog de spreker in de middagvergadering, de heer Kl. Wigand uit Krefeld, die inmiddels is binnengekomen, heeft verwelkomd, wordt de vergadering te 12,45 voor de lunch, geschorst.

Om 14,15 wordt de vergadering voortgezet en spreekt de heer Wigand over: Didaktische Fragen zur Modernisierung der Schulmathematik". Het volgen van deze voordracht wordt vergemakkelijkt, doordat de spreker een uitvoerige syllabus heeft verstrekt. Op deze voordracht volgt — evenals op die van prof. Bottema — een korte gedachtenwisseling.

Van de rondvraag maakt ir. mr. M. Groote gebruik om mede namens de aanwezige inspecteurs te danken voor de uitnodiging. De heer Leujes doet dit namens de vertegenwoordigers der zusterverenigingen.

De heer Krooshof doet nog enige mededelingen over „Pythagoras".

Nadat de voozitter nog de heer drs. W. Knol uit Assen, die enige vragen stelt over de verandering van het aantal lesuren door de afschaffing van de mechanica, en over de samenwerking van Wimecos met de inspectie, heeft beantwoord, sluit hij te ongeveer 16,30 de vergadering.

JAARVERSLAG OVER HET VERENIGINGSJAAR 1 SEPTEMBER 1961—31 AUGUSTUS 1962

De vereniging telde op 31 augustus 1962 535 leden, wat vergeleken bij de stand op 31 augustus 1961 een vooruitgang van slechts 7 leden betekende.

Op de algemene ledenvergadering van 28 december 1961 werd Prof. Dr. O. Bottema te Delft tot erelid van de vereniging benoemd. De vereniging telt nu 4 ereleden. De genoemde jaarvergadering, in „Esplanade" te Utrecht gehouden, stond voor de laatste maal onder de beproefde leiding van dr. Joh. H. Wansink, die zijn bestuursfunctie neerlegde. Hem werd dank gebracht voor het vele dat hij voor het wiskundeonderwijs in ons land en voor Wimecos verricht heeft. In zijn plaats werd als bestuurslid gekozen drs. H. W. Lenstra te Groningen. Het bestuur werd als volgt samengesteld: Voorzitter: dr. ir. B. Groeneveld; secretaris: drs. J. F. Hufferman; penningmeester: drs. J. D. de Jong; 2e secretaris: drs. H. W. Lenstra. Leden: C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin.

Verder werd op deze jaarvergadering besloten om „Euclides" tevens tot orgaan van de wiskundegroep van de W.V.O. te maken. De nodige stappen tot uitvoering van dit besluit werden inmiddels gedaan.

De voordrachten op de jaarvergadering werden gehouden door prof. dr. O. Bottema te Delft, die sprak over: „De stelling van Pompeiü" en door de Heer Klaus Wigand uit Krefeld, wiens voordracht luidde: „Didaktische Fragen zur Modernisierung der Schulmathematik".

In oktober werd door het bestuur een brief gezonden aan de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen over de positie van het onderwijs in de kosmografie in de mammoetwet. De tekst van deze brief is te vinden in Euclides, 37, IV, pag. 126.

Te Utrecht werd 19 april 1962 het veertiende congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen gehouden. In het congresbestuur is ook Wimecos vertegenwoordigd. De wiskundesectie stond onder leiding van dr. Joh. H. Wansink. Het algemeen thema van dit zeer druk bezochte congres was: „Ruimte en tijd."

De door het Mathematisch Centrum georganiseerde vakantiecursus voor leraren op 31 augustus en 1 september, trok eveneens zeer veel deelnemers. Ook hier is Wimecos in de adviescommissie vertegenwoordigd.

Ten slotte zij nog vermeld dat het bestuur in de verslagperiode vier maal vergaderde, en dat de verhouding tot de zusterverenigingen uitstekend was.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE.

Haarlem, 18 september 1962

Aan de Jaarlijkse Algemene Vergadering van

WIMECOS TE UTRECHT

Ondergetekenden, B. Kleefstra en A. H. F. Saeys, aangewezen als kascommissie van de vereniging voor het boekjaar september 1961—1962 tijdens de algemene vergadering van december 1961, verklaren hierbij heden de boeken en bescheiden van de penningmeester te hebben nagezien en akkoord bevonden.

De commissie stelt u voor de penningmeester over het boekjaar september 1961—1962 décharge te verlenen voor het gevoerde beheer.

De commissie is van oordeel, dat de penningmeester voor zijn omvangrijk werk ten behoeve van de vereniging gedaan een bijzonder woord van waardering niet mag worden onthouden.

De commissie
w.g. B. Kleefstra
A. F. H. Saeys

VERSLAG REDACTIE-EUCLIDES
JAARGANG 37 (1961—1962)

Aan de Besturen van
„Wimecos" en „Liwenagel"

De samenstelling van de 37e jaargang van Euclides verschilt weinig van die van de er aan voorafgaande jaargangen. Eén nieuwe rubriek werd ingevoerd: „Didactische Literatuur uit buitenlandse tijdschriften". De redactie meent dat deze in een behoefte voorziet.

Verschillende van de in de jaargang opgenomen artikelen behandelen onderwerpen waarvan verwacht kan worden, dat ze in de toekomst tot de leerstof van

het V.H.M.O. zullen behoren of geven wensen t.a.v. zulke onderwerpen aan. Zulke bijdragen zijn voor een tijdschrift voor de didactiek van de wiskunde van urgente betekenis, mede wegens hun belang voor de heroriëntering van de leraar. De redactie hoopt dan ook in de komende jaren meer van dergelijke bijdragen te mogen ontvangen.

De samenwerking met en de medewerking van de uitgever was als in vorige jaren zeer goed. Het blad kon daardoor regelmatig verschijnen.

De redactie beschikte steeds over voldoende kopij, hoewel helaas weer moet worden opgemerkt, dat niet alle toegezegde teksten van lezingen werden ontvangen.

De jaargang telde 336 bladzijden, een 16-tal meer dan normaal.

13 oktober 1962

Namens de redactie

De voorzitter, Joh. H. Wansink

De secretaris, A. M. Koldijk

TIJDSCHRIFTEN-CIRCULATIE WIMECOS; JAARVERSLAG 1961—1962

In het afgelopen verenigingsjaar steeg het aantal lezers van 32 tot 37, zodat aan abonnementsgelden ongeveer ƒ 340,— binnenkwam tegen verleden jaar ƒ 230,—.

Met een dubbelabonnement op het tijdschrift ,,Anterrichtsblätter" en een nieuwe aanwinst: ,,Praxis der Mathematik" stegen de onkosten met ongeveer ƒ 47,—; nieuwe inlegvellen vroegen ƒ 38,—, maar dit tezamen met het batig saldo van ƒ 47,— van verleden jaar deed de balans toch nog aan de goede kant doorslaan; de leesportefeuille kan nog zich zelf bedruipen!

Momenteel is de situatie aldus:

Uitgaven ƒ 275,58; inkomsten ƒ 340,70, zodat bij afsluiting op 1 december a.s. een batig saldo van ƒ 45,— mogelijk is.

De circulatie van de tijdschriften verliep in het algemeen vrij regelmatig, al waren er afleveringen, die in plaats van 7 weken, 2 jaren (!) onderweg waren, hetgeen natuurlijk bij enkele lezers scherpe kritiek opriep.

Alles bijeen: nog steeds een gezonde positie van de leesportefeuille en dus met goede hoop het jaar 1962—1963 tegemoet getreden.

Roosendaal, 1 oktober 1962

w.g. G. Boost.

VOORLOPIGE AGENDA VAN DE ALGEMENE LEDENVERGADERING VAN WIMECOS

op vrijdag 28 december 1962 in ,,Esplanade", Lucas Bolwerk, Utrecht.

Aanvang 10,30 uur.

1. Opening door de voorzitter Dr. ir. B. Groeneveld.
2. Notulen van de algemene vergadering van 28 december 1961.

3. Jaarverslagen alle
   a) van de secretaris,
   b) van de penningmeester,
   c) van de kascommissie,
   d) van de redactie van „Euclides",
   e) van de commissie voor de leesportefeuille.
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van een nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodieke aftreding van de heren C. J. Alders en dr. P. G. J. Vredenduin.
   Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Voordracht door prof. dr. J. de Groot, hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam. Onderwerp: Het vierkleurenprobleem.

Pauze

In de middagvergadering, aanvangend ± 14.15 uur:

7. Voordracht door Dr. J. Deknatel te Haarlem. Onderwerp: Wensen van de fysicus t.a.v. het wiskundeprogramma.
8. Rondvraag.
9. Sluiting.

N.B. Deze mededeling geldt tevens als voorlopige convocatie voor de leden van Wimecos. Deze kunnen tot uiterlijk 1 december a.s. nieuwe agendapunten voorstellen bij de secretaris, drs. J. F. Hufferman, Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist.

BOEKBESPREKING

Van uitgeversmij. „Cobeledi" te Brussel ontvingen wij:
Mac. Lefort, *la libération de l'énergie nucléaire.* 115 blz. Bf. 100.—
dr. R. Devoret, *dangers des radiations atomiques,* 140 blz. Bf. 120.—
M. de Visser, Chr. Beckers, *les isotopes radioactifs en médecine* 160 blz. Bf 140.—

Bovengenoemde boekjes behandelen op populair wetenschappelijke wijze, deze onderwerpen waarvoor velen belangstelling zullen hebben. Veel wiskundige kennis is niet nodig, enige kennis van fysische grootheden is echter wel gewenst.

Het zijn prettig geschreven boekjes, die hun weg wel zullen vinden.

Burgers

T. Ehrenfest Afanassjewa, *Didactische opstellen, Wiskunde,* uitg. N.V. W.J Thieme & Cie., Zutphen. 164 blz. prijs f. 4,50

Het is een goede gedachte van Bruno Ernst geweest, de verschillende voordrachten van Mevrouw Ehrenfest, verspreid gepubliceerd, te bundelen.

Deze voordrachten zijn nu bereikbaar, niet alleen voor hen, die door hun studie voor een acte L.O.Wiskunde b.v. grote behoefte hebben aan doordachte ideeën, maar ook voor hen, die in het dagelijkse leven, wiskundeonderwijs bedrijven en open willen staan voor ideeën van anderen.

Gaarne wil ik dit boekje een ruime verspreiding toewensen.

Burgers

ONTVANGEN BOEKEN

Van P. Noordhoff, Groningen:

Dr. J. H. Raat, *Natuurkunde-Practicum*, deel 3, 1962.

Dr. J. H. Raat, *Natuurkunde-Practicum*, verantwoording en toelichting voor docenten. *f* 1,25.

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen, *Goniometrie en Grafieken* voor het examen M.U.L.O.-B, 7e druk, *f* 1,90.

Van J. B. Wolters, Groningen:

Dr. P. G. J. Vredenduin, *Planimetrie*, 3e druk, *f* 3,25.

Dr. P. Bronkhorst en Dr. Ir. B. Groeneveld, *Stereometrie* voor V.H.M.O., 3e druk, *f* 1,90.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, *Analytische Meetkunde*, 2e druk, *f* 3,90.

Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, *Vlakke Meetkunde*, deel III, 5e druk *f* 3,25.

Van Thijns wiskundige leergang, *Analytische Meetkunde*, 2e druk, herzien door I. Abram, *f* 3,25.

Wolters' Nieuwe tafels voor logaritmen en goniometrische functies, 2e druk.

Van John Wiley and Sons Inc, New York-London:

Clifford Bell e.a., *Fundamentals of Arithmetic for Teachers*, 390 blz.

Dit boek is voor docenten bij het V.H. en M.O. van geen belang.

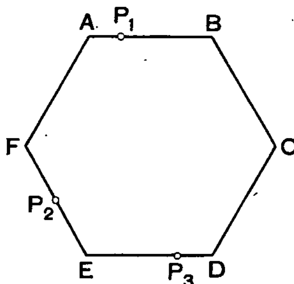
RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (s.v.p. persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

77. Bereken het kleinste natuurlijke getal a met de volgende eigenschappen. Trek $\frac{1}{2}$ van a af en daarna nog $\frac{1}{3}$ deel van het verschil (dus van $a - \frac{1}{2}$). Herhaal deze bewerking daarna nog driemaal. We krijgen dan ten slotte als uitkomst een natuurlijk getal b. Deel b op a en noem de rest r. Het getal r heeft weer de eigenschap, dat als we er $\frac{1}{2}$ van aftrekken en daarna $\frac{1}{3}$ deel van het verschil en deze bewerking nog driemaal herhalen, we een natuurlijk getal als uitkomst krijgen.

78. ABCDEF is een regelmatige zeshoek.

De punten P_1, P_2 en P_3 zijn zo gelegen, dat $AP_1 : 1 = FP_2 : 2 = EP_3 : 3$. Van deze figuur zijn alleen de punten P_1, P_2 en P_3 gegeven. Construeer de zeshoek.



OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

75. Het probleem komt neer op het oplossen van de vergelijking

$$a \cdot 10^n + b = a(a + b),$$

waarin a, b en n natuurlijke getallen zijn en $b < 10^n$.

Hieruit volgt dat b deelbaar is door a. Stel $b = pa$ (p geheel en $\leqq 9$).

$$a \cdot 10^n + pa = a(a + pa)$$
$$10^n + p = a + pa$$
$$a(p + 1) = 10^n + p$$

Hieraan kan slechts worden voldaan als p even is en $\neq 4$, dus $p = 2$, 6 of 8.

$p = 2$ a kan worden bepaald voor iedere n.

$n = 1$	$3a = 12$	$a = 4$	$48 = 4\ (4 + 8)$
$n = 2$	$3a = 102$	$a = 34$	$3468 = 34\ (34 + 68)$
$n = 3$	$3a = 1002$	$a = 334$	$334668 = 334\ (334 + 668)$
$n = 4$	$3a = 10002$	$a = 3334$	$33346668 = 3334\ (3334 + 6668)$

enz.

$p = 8$ a kan worden bepaald voor iedere $n \geqq 2$.

$n = 2$	$9a = 108$	$a = 12$	$1296 = 12\ (12 + 96)$
$n = 3$	$9a = 1008$	$a = 112$	$112896 = 112\ (112 + 896)$
$n = 4$	$9a = 10008$	$a = 1112$	$11128896 = 1112\ (1112 + 8896)$

enz.

$p = 6$ a kan worden bepaald voor iedere n, waarvoor $10^n \equiv 1 \pmod 7$; dit is het geval dan en alleen dan wanneer n deelbaar is door 6.

$n = 6$ $7a = 1\,000\,006$ $a = 142858$

$142858857148 = 142858\ (142858 + 857148)$

$n = 12$ $7a = 1\,000\,000\,000\,006$ $a = 142857142858$

142857142858857142857148

$= 142857142858\ (142857142858 + 857142857148)$

enz.

76. Men kan een cirkel brengen door drie punten (boerderijen) en een concentrische door het vierde punt; de concentrische ,,middencirkel'' voldoet dan. Dit geeft vier manieren.

Men kan ook twee concentrische cirkels tekenen, die elk door twee punten gaan en van deze twee de ,,middencirkel''. Dit geeft nog drie manieren zodat er 7 oplossingen zijn.

De tweede methode kan één of twee maal mislukken als de punten juist de hoekpunten zijn van een parallellogram of trapezium.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, de Houtmanstraat 37, Hoogezand.

WISKUNDE WERKGROEP VAN DE W.V.O.

Weekendconferentie op 10 en 11 november.

Op bovengenoemde data vindt de jaarlijkse weekendconferentie plaats van de Wiskunde Werkgroep van de W.V.O. in het conferentieoord „De Grasheuvel", De Genestetlaan 9, Amersfoort.

Het thema luidt: Hulpmiddelen bij 't wiskundeonderwijs.

De indeling is als volgt:

Zaterdag:

15,30 Opening door de voorzitter, Prof. dr. H. Freudenthal.
Spreker: Broeder Erich: Film en filmstrook als hulpmiddel bij de instructie van bewegingen (met voorbeelden).

16,45 Dr. G. Bosteels, Antwerpen: De Math. box en ander materiaal voor het aanbrengen van moderne wiskundige begrippen.

20,00 Dr. L. van Gelder: Teaching Machines.

Zondag:

11,00 Demonstraties met materiaal van Dr. Bosteels en van andere deelnemers. Zo mogelijk vertoning van films.

14,30 Pater dr. E. Pelosi, S.J.: Televisie.

16,30 Sluiting.

Kosten: *f* 12,50 voor leden, *f* 15,00 voor niet-leden. Voor wie geen logies wenst, resp. *f* 10,00 of *f* 12,50. Voor één dag *f* 7,50 of *f* 10,00.

Storting en aanmelding: giro 614418 t.n.v. de penningmeester, Haarlem. Alle verdere inlichtingen: de Heer H. C. Vernout, Van Nouhuysstr. 11, Haarlem, tel. 02500-57288.

VELINES NATUURKUNDE-SECTIE

Avondcolleges 1962/63 voor leraren en andere belangstellenden.

Op de donderdagavonden 8, 15 en 22 november en 6, 13 en 20 december zullen avondcolleges gegeven worden over het onderwerp *„Relativiteitstheorie"*, door Dr. Th. W. Ruijgrok, wetenschappelijk ambtenaar 1e klas aan het Instituut voor Theoretische Fysica te Utrecht.

De colleges zullen plaats vinden in de grote collegezaal van het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat 6 te Utrecht. Aanvang 19 uur.

Indien men hieraan wenst deel te nemen, dient men zich tijdig op te geven bij Dr. J. Deknatel, Iordensstraat 4 te Haarlem.

Ten gunste van de leraren-deelnemers is een subsidie aangevraagd bij het ministerie van O. K. & W. teneinde de reiskosten geheel of gedeeltelijk te kunnen vergoeden.

Van de voordrachten zal een syllabus worden verstrekt.

De voorzitter, Drs. H. J. Stammer.

Voorjaar 1963 verschijnt:

Kuipers & Timman

HANDBOEK DER WISKUNDE

onder redactie van Dr. L. Kuipers en Dr. R. Timman, hoogleraren aan de Technische Hogeschool te Delft

INHOUD:

1 DR. C. H. VAN OS (oud-ordinarius T.H. Delft): **Uit de geschiedenis der wiskunde**

De eerste getallen - Voortzetting der getallenrij - Het oneindige - Het irrationale - Het oneindig kleine - De ontwikkeling der analyse - De moderne tijd.

2 DR. F. LOONSTRA (hoogleraar T.H. Delft): **Getallenstelsels**

De natuurlijke getallen - De gehele getallen - De rationale getallen - De reële getallen - Complexe getallen.

3 DR. F. LOONSTRA (hoogleraar T.H. Delft): **Lineaire algebra**

Vectoren, vectorruimte - Afhankelijkheid, dimensie, basis - Deelruimte - Het scalaire produkt - Lineaire transformatie, matrix - Vermenigvuldiging van lineaire transformaties - Vermenigvuldiging van matrices - Rijmatrices, kolommatrices - Rang van een matrix - Determinanten - Oplossen van een niethomogeen stelsel vergelijkingen - oplossen van een homogeen stelsel vergelijkingen - Eigenwaarden - Eigenwaarden en eigenvectoren van symmetrische (reële) matrices - Hoofdassentransformatie van symmetrische matrices.

4 DR. F. LOONSTRA (hoogleraar T.H. Delft): **Analytische meetkunde**

Coördinaten - De meetkunde van het platte vlak en van de rechte lijn - Homogene coördinaten - Cirkel en bol - Kegelsneden - Onderzoek naar krommen van de tweede graad - Pooltheorie voor kegelsneden - Oppervlakken van de tweede graad - Onderzoek naar oppervlakken van de tweede graad - Pooltheorie voor tweedegraadsoppervlakken.

5 DR. B. MEULENBELD (hoogleraar T.H. Delft): **Analyse**

Beginselen der differentiaal- en integraalrekening - Functie van twee veranderlijken; partiële differentiatie - Meervoudige integralen.

6 DR. L. KUIPERS (hoogleraar T.H. Delft): **Getallenrijen - reeksen**

Getallenrij - Convergentie - Divergentie - Berekening van limieten - Monotone rijen - De algemene convergentie - Stelling van Cauchy - Reeksen - Uniforme (gelijkmatige) convergentie - Reeks van Fourier.

7 DR. H. J. A. DUPARC (hoogleraar T.H. Delft): **Functietheorie**

Complexe getallen - Functies - Integraalstellingen - Reeksen - Singuliere punten - Conforme afbeeldingen - Oneindige produkten.

8 DR. S. C. VAN VEEN (hoogleraar T.H. Delft): **Gewone differentiaalvergelijkingen**

Inleiding - Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde - Lineaire differen-

Z.O.Z.

tiaalvergelijkingen van de eerste orde - Enige opmerkingen over de theorie - Lineaire differentiaalvergelijkingen van hogere orde - Homogene vergelijkingen met constante coëfficiënten - Niet-homogene differentiaalvergelijkingen - Niet-lineaire differentiaalvergelijkingen - Gekoppelde of simultane differentiaalvergelijkingen.

9 DR. S. C. VAN VEEN (hoogleraar T.H. Delft): **Bijzondere functies**

Gamma-functie en beta-functie - Gewone lineaire differentiaalvergelijkingen van de tweede orde met veranderlijke coëfficiënten - Hypergeometrische functies - Functies van Legendre - Functies van Bessel - Bolfuncties.

10 DR. R. TIMMAN (hoogleraar T.H. Delft): **Vectoranalyse**

Vectoren in de ruimte - Theorie der vectorvelden - Potentialen van massabeleggingen - Dyaden en tensoren.

11 DR. R. TIMMAN (hoogleraar T.H. Delft): **Partiële differentiaalvergelijkingen**

Vergelijkingen van de eerste orde - Stelsel quasi-lineaire hyperbolische vergelijkingen van de tweede orde - Lineaire vergelijkingen met constante coëfficiënten - Approximatiemethoden bij elliptische differentiaalvergelijkingen.

12 DR. IR. L. KOSTEN (hoogleraar T.H. Delft): **Numerieke analyse**

Inleiding - Interpolatie - Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen - Het bepalen van wortels van een vergelijking - Bewerkingen met lineaire systemen - Nogmaals het benaderen van functies door polynomen - Numerieke integratie van partiële differentiaalvergelijkingen - Algol 60.

13 DR. IR. J. W. COHEN (hoogleraar T.H. Delft): **Laplace-transformaties**

De theorie van de Laplace-transformatie - Toepassingen van de Laplace-transformatie - Fourier-transformaties - Tabellen - Addendum.

14 DR. J. HEMELRIJK (hoogleraar Universiteit van Amsterdam): **Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek**

Inleiding - Grondbegrippen en axioma's van de waarschijnlijkheidsrekening - Kansverdelingen - Mathematische verwachting en momenten - Karakteristieke functies en limietstellingen - De normale verdeling - Toetsingstheorie - Betrouwbaarheidsgrenzen - Theorie der lineaire hypothesen.

REGISTER
LITTERATUUR

Bibliogr. gegevens - ca. 850 blz. met talrijke figuren, formaat 16 x 24.5 cm, gebonden in linnen met stofomslag
(voorjaar 1963) *ca. f 79.—*

Gezien het feit dat tot dusver in ons land niet een dergelijk uitvoerig en up-to-date handboek is verschenen, bestaat hiervoor nu reeds veel belangstelling! Wij adviseren U dan ook dringend Uw exemplaar tijdig te bestellen. Onderstaand bestelbiljet maakt U dat gemakkelijk. Franco levering.

(hierlangs afknippen en opzenden aan onderst. adres)

Ondergetekende

(Naam) ....

(Adres) ....

(Woonplaats) ....

handtekening ....

bestelt hiermede bij ALGEMENE- & WETENSCHAPPELIJKE BOEKHANDEL VAN DER GALIE V/H VET, OUDEGRACHT 261 — UTRECHT
(TEL. 030-12182)
.... ex. Kuipers & Timman: HANDBOEK DER WISKUNDE à *ca. f 79,—*.